



Approximation tensorielle sous contrainte d'existence. Application au traitement d'antennes

Souleymen Sahnoun, Pierre Comon

► To cite this version:

Souleymen Sahnoun, Pierre Comon. Approximation tensorielle sous contrainte d'existence. Application au traitement d'antennes. *Traitement du Signal*, 2016, 33 (1), pp.11-33. 10.3166/TS.33.11-33 . hal-01281032

HAL Id: hal-01281032

<https://hal.science/hal-01281032>

Submitted on 4 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial| 4.0 International License

Approximation tensorielle sous contrainte d'existence. Application au traitement d'antennes

Souleyman Sahnoun, Pierre Comon *

Gipsa-Lab, CNRS, 11 rue des Mathématiques, 38000 Grenoble, France
prenom.nom@gipsa-lab.fr

Résumé

On s'intéresse au problème de localisation et d'estimation de sources dans des conditions difficiles, à savoir lorsque les sources sont corrélées et proches dans l'espace, et les échantillons courts. L'algorithme proposé est basé sur une approximation tensorielle de rang faible sous des contraintes originales garantissant son existence. Il nécessite une antenne formée de plusieurs sous-antennes identiques se déduisant les unes des autres par translation. Les bornes de performances sont calculées en présence de bruit additif gaussien complexe non circulaire.

Abstract

The subject is localization and estimation of sources in difficult conditions, namely when the sources are correlated and closely located in space, and samples are short. The proposed algorithm is based on a low-rank tensor approximation under original constraints ensuring its existence. It requires an antenna array formed of identical subarrays shifted in space. Performance bounds are computed in the presence of additive complex noncircular Gaussian noise.

*Les auteurs sont financés par le projet ERC "DECODA" no. 320594, dans le cadre du programme européen FP7/2007-2013.

1 Introduction

Contexte. La localisation de sources en champ lointain (estimation des directions d’arrivée) est un très vieux problème en traitement d’antenne, notamment Radar, Sonar ou télécommunications [14]. Les méthodes les plus anciennes, comme la formation de voies, sont non paramétriques, et recourent à la transformée de Fourier spatiale.

Les approches haute-résolution (HR) traditionnelles sont basées sur une approximation de rang faible de la matrice de covariance spatiale, ce qui revient à travailler dans un “sous-espace signal” [2]. L’algorithme MUSIC (multiple signal classification), aussi connu sous le nom de “goniomètre”, détecte les points de ce sous espace signal situés à distance minimale de la variété d’antenne [2] [23] [32]. Ces approches HR supposent que (i) les mesures sont stationnaires au sens large sur une observation suffisamment longue, (ii) le nombre de sources est inférieur au nombre de capteurs, et (iii) la réponse spatiale et la position exacte de tous les capteurs sont connues. Plus récemment, des méthodes basées sur des approximations parcimonieuses ont été proposées, et sont considérées comme semi-paramétriques [26] [22].

Une autre famille de méthodes de type sous-espace est celle initiée dans [21] sous le nom de ESPRIT (estimation of signal parameters via rotational invariance techniques). La technique proposée est applicable si le réseau d’antenne utilisé est composé de deux sous-antennes se déduisant l’une de l’autre par translation. Dans cet article original, cette translation est connue mais les positions exactes des capteurs au sein de chaque sous-antenne n’ont pas besoin d’être connues (mais les deux sous-antennes doivent être strictement identiques). Une extension d’ESPRIT à plus de deux sous-antennes a été proposée peu après dans [28], avec des translations colinéaires. Dans [20], une extension de l’algorithme root-MUSIC a été proposée et s’applique à des sous-antennes rectilignes parallèles.

Dans le présent article, on considère un nombre arbitraire de sous-antennes, se déduisant les unes des autres par des translations arbitraires, ce qui est l’hypothèse faite aussi dans [24]. Dans cette dernière contribution, l’approche est déterministe, ce qui permet de fonctionner avec des horizons très courts (et donc avec des sources potentiellement non stationnaires). Il est aussi possible de localiser et d’estimer plus de sources que de capteurs présents dans chaque sous-antenne. Le principe est similaire à celui utilisé dans ESPRIT, mais peut faire face à des translations toutes différentes. Grâce à l’invariance de translation, le problème se ramène à la décomposition d’un tenseur d’ordre trois en somme de tenseurs de rang 1 ; cette décomposition est souvent qualifiée de “Canonique polyadique” (CP). Contrairement au cas matriciel, une telle décomposition est unique si le rang est inférieur à une borne connue. Cependant, la meilleure approximation de rang faible n’existe pas toujours [15], et exige certaines précautions.

Contributions. Nous revisitons l’approche intéressante de [24], dans laquelle l’éventualité d’inexistence de la meilleure approximation de rang faible a été négligée. Nous proposons une implantation des contraintes suffisantes décrites dans [15], sous la forme de pénalités dans la fonction objectif. Ces contraintes impliquent les cohérences des facteurs matriciels, revêtent une signification physique, et garantissent l’existence de la meilleure approximation de rang faible. Nous calculons ensuite les bornes de Cramér-Rao (CR) relatives à la localisation des sources, et à l’estimation de leur forme

d’onde, en traitant les translations entre sous-antennes comme paramètres de nuisance. Nous traitons aussi le cas de bruit additif gaussien complexe non circulaire, et n’utilisons pas la contrainte inutile supplémentaire imposée dans [16]. En outre, nous prenons en compte explicitement le fait qu’un des facteurs matriciels est paramétré par les directions d’arrivée (DoA), ce qui n’avait pas été fait dans [16]. Notons que les bornes de CR ont été calculées pour des tenseurs d’ordre quelconque dans [29], mais dans le cas réel et sans paramétrage par les DoA.

Organisation. Nous introduisons d’abord le modèle d’observation et les notations dans la section 2. Les conditions suffisantes d’existence et d’unicité sont établies dans la section 3. Nous décrivons ensuite l’algorithme d’optimisation dans la section 4, et les bornes de CR dans la section 5. Les performances sont enfin évaluées à travers des simulations informatiques dans la dernière section.

2 Vision du problème comme décomposition tensorielle

Supposons que R sources rayonnantes à bande étroite éclairent sur un réseau de capteurs, formé de L sous-antennes de K capteurs chacune, avec une géométrie arbitraire. Nous faisons l’hypothèse de champ lointain, c.-à-d., nous supposons que les sources sont situées suffisamment loin de l’antenne par rapport aux dimensions de cette dernière, de sorte que les ondes peuvent être considérées comme planes.

2.1 Hypothèses

L’hypothèse clé utilisée dans [21, 24, 15] est que, en prenant une sous-antenne comme référence, la ℓ ème sous-antenne peut être déduite de celle de référence par une translation dans l’espace, définie par un vecteur δ_ℓ of \mathbb{R}^3 , $1 \leq \ell \leq L$, $\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$. Dans cet article, nous supposons que cette translation est inconnue. Bien qu’elle ne figure pas parmi les paramètres recherchés, elle devra être estimée, de sorte qu’elle sera traitée comme un paramètre de nuisance dans notre problème.

L’hypothèse que la translation est inconnue est pertinente dans un certain nombre d’applications, même si elle n’a pas été considérée dans [27, 19]. Par exemple, considérons un réseau de L bouées flottant sur la surface de la mer, chacune équipée d’une antenne rigide de K hydrophones orientée vers le Nord. La forme et l’orientation de chaque antenne est connue, mais la forme du réseau ne l’est pas. Un autre exemple est celui des expérimentations effectuées à partir de grandes antennes dont la position exacte de capteurs éloignés est mal connue. C’est le cas notamment des enregistrements effectués sur les glaciers dans des conditions difficiles : l’altitude exacte des capteurs est mal connue. Le calcul des bornes effectué dans [27, 19] suppose que la position exacte de tous les capteurs est parfaitement connue, ce que nous n’allons pas supposer ici.

2.2 Notations

On convient de noter les vecteurs en minuscules grasses, *e.g.* \mathbf{d} , alors que les matrices ou les tableaux à plus de deux indices seront notés avec des capitales grasses, *e.g.*

S ou \mathbf{Z} . En outre, \mathbf{a}_r représentera la r ème colonne de la matrice \mathbf{A} .

Notons $\varsigma_r(t)$ le signal transmis par la r ème source, ψ_r sa direction d'arrivée (DoA) vue de l'antenne, $\mathbf{d}_r \in \mathbb{R}^3$ son vecteur directionnel (normé) associé, et $z(\mathbf{y}, t)$ le signal mesuré en un point de l'espace défini par ses coordonnées \mathbf{y} (on considère les enveloppes complexes autour de la fréquence centrale). Nous avons alors :

$$z(\mathbf{y}, t) = \sum_{r=1}^R \varsigma_r(t) a_r(\mathbf{y}), \quad a_r(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\{j \frac{\omega}{c} \mathbf{y}^\top \mathbf{d}_r\} \quad (1)$$

où ω est la pulsation centrale des ondes à bande étroite, c la célérité de l'onde et $j = \sqrt{-1}$. Puisque les ondes sont planes et à bande étroite, le signal mesuré à un autre point $\mathbf{y} + \boldsymbol{\tau}$, déduit de \mathbf{y} par une translation $\boldsymbol{\tau}$ prend la forme :

$$z(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, t) = \sum_{r=1}^R a_r(\mathbf{y}) b_r(\boldsymbol{\tau}) \varsigma_r(t), \quad b_r(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\{j \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\tau}^\top \mathbf{d}_r\} \quad (2)$$

En d'autres termes, la fonction $z(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, t)$ se décompose en une somme de R fonctions élémentaires (plus simples) dont les variables sont séparables.

Maintenant, si nous discrétisons l'espace \mathbb{R}^3 avec les sous-antennes définies plus haut, et prenons M échantillons de temps, nous nous retrouvons avec une relation multi-linéaire¹ dans des espaces de dimension finie. En effet, soit \mathbf{p}_k le vecteur de coordonnées du k ème capteur de la sous-antenne de référence, et $\boldsymbol{\delta}_\ell$ la translation définissant l'emplacement de la ℓ ème sous-antenne, $1 < \ell \leq L$. Alors le signal (2) peut être stocké dans un tableau à trois dimensions de taille $K \times L \times M$, qui suit le modèle ci-dessous, éventuellement corrompu par un bruit additif :

$$Z_{k\ell m} = \sum_{r=1}^R \lambda_r A_{kr} B_{\ell r} S_{mr} \quad (3)$$

où $A_{kr} = \frac{1}{\sqrt{K}} \exp(j \frac{\omega}{c} \mathbf{p}_k^\top \mathbf{d}_r)$, $B_{\ell r} = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(j \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\delta}_\ell^\top \mathbf{d}_r)$, $S_{mr} = \varsigma_r(t_m) / \|\varsigma_r\|$, et $\lambda_r = \sqrt{KL} \|\varsigma_r\|$. On notera que \mathbf{a}_r , \mathbf{b}_r et \mathbf{s}_r sont donc des vecteurs unitaires selon la norme L^2 .

Le modèle (3) est lié à la décomposition Canonique Polyadique (CP)², qui consiste à décomposer un tenseur \mathbf{Z} en une somme de tenseurs *décomposables*. Pour simplifier la présentation, l'équation (3) est réécrite dans la forme vectorisée suivante :

$$\mathbf{z} = \sum_{r=1}^R \lambda_r \mathbf{a}_r \boxtimes \mathbf{b}_r \boxtimes \mathbf{s}_r \quad (4)$$

où \boxtimes désigne le produit de Kronecker³, et $\mathbf{z} = \text{vec}\{\mathbf{Z}\}$ est un vecteur colonne de dimension KLM contenant les éléments du tenseur \mathbf{Z} , qui est d'ordre 3.

1. Voir e.g. [6] pour une définition de la multi-linéarité.

2. aussi appelée parfois Candecomp/Parafac en Psychométrie ou Chimiométrie [13].

3. Cette notation est choisie pour faire la distinction entre les produits tensoriels et de Kronecker, qui sont parfois confondus [6].

3 Existence et unicité

Le but de cette section est d'identifier les directions d'arrivée ψ_r des R ondes planes incidentes et d'estimer les signaux sources transmis correspondants $\varsigma_r(t_m)$ à un facteur d'échelle près, à partir du tenseur \mathbf{Z} . Pour y parvenir, nous devons identifier tous les paramètres du membre de droite dans l'équation (4).

3.1 Approximation de rang faible

En pratique, les observations sont corrompues par du bruit, de sorte que (3-4) ne sont vérifiées que approximativement. Une idée naturelle consiste alors à ajuster le modèle (4) en minimisant l'erreur

$$\Upsilon(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}; \boldsymbol{\lambda}) = \left\| \mathbf{z} - \sum_{r=1}^R \lambda_r \mathbf{a}_r \boxtimes \mathbf{b}_r \boxtimes \mathbf{s}_r \right\|^2 \quad (5)$$

où $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_R]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_R]$, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_R]$, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_R]^\top$ et $\|\cdot\|$ représente la norme L^2 . Minimiser l'erreur (5) signifie trouver la meilleure approximation de rang R de \mathbf{Z} et sa décomposition CP. Toutefois, l'infimum de Υ peut ne pas être atteint ; cf. par exemple [5, 15] et les références qui y figurent. La raison est que l'ensemble des tenseurs de rang R n'est pas fermé pour $R > 1$. L'idée que nous promovons ici est d'imposer une contrainte qui garantira l'existence d'un minimum, tel qu'établi dans la section suivante. En outre, d'un point de vue physique, on peut faire les observations suivantes :

- les sources totalement corrélés ne doivent être localisées séparément que si elles sont suffisamment bien séparées angulairement. Dans ce cas, elles correspondent à des multi-trajets de la même source rayonnante.
- les sources se trouvant dans la même direction ne doivent être estimées séparément que si elles sont suffisamment décorrélées. Dans ce dernier cas, elles correspondent à des sources différentes.
- sinon, les sources fortement corrélés et arrivant en provenance de directions proches peuvent être assimilées à une *source étendue* unique dans l'espace.

L'objectif de cette section est de formaliser ces contraintes.

3.2 Cohérences

Nous définissons la *cohérence d'un ensemble* de vecteurs normés comme la plus grande valeur des produits scalaires croisés [11, 10] :

$$\mu_A = \sup_{k \neq \ell} |\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_\ell|. \quad (6)$$

si les \mathbf{a}_k sont les colonnes normées de la matrice \mathbf{A} . Les cohérences des matrices \mathbf{B} et \mathbf{S} sont définies de la même façon, et représentées par μ_B and μ_S , respectivement. Soit \mathbf{G} la matrice de Gram de dimension $R \times R$ définie par :

$$G_{pq} = (\mathbf{a}_p^H \mathbf{a}_q)(\mathbf{b}_p^H \mathbf{b}_q)(\mathbf{s}_p^H \mathbf{s}_q).$$

Alors pour des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} and \mathbf{S} données, la valeur optimale $\boldsymbol{\lambda}^o$ minimisant l'erreur Υ est obtenue en annulant la gradient de (5) par rapport à $\boldsymbol{\lambda}$, ce qui conduit au système linéaire :

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}^o = \mathbf{f}, \quad (7)$$

où le vecteur \mathbf{f} est défini par la contraction $f_r = \sum_{ijk} Z_{ijk} A_{ir}^* B_{jr}^* S_{kr}^*$, $1 \leq r \leq R$. L'équation (7) montre que les cohérences jouent un rôle dans conditionnement du problème de minimisation, et que seul leur *produit* importe.

3.3 Existence

Il a été montré dans [15] que si $\mu_A \mu_B \mu_S < 1/(R-1)$, alors l'infimum de (5) est atteint. En pratique, il est nécessaire d'avoir une inégalité large, de sorte qu'on restreint la recherche au domaine suivant, en choisissant $\nu \in]0, 1[$:

$$\mu_A \mu_B \mu_S \leq \frac{\nu}{R-1} \quad (8)$$

Cela se produit parce que l'erreur (5) devient coercive dès que (8) est satisfaite, et doit donc atteindre son minimum puisqu'elle est continue.

La condition (8) peut être interprétée comme suit [15]. Une petite valeur d'une cohérence, *e.g.* μ_A , signifie une séparation angulaire suffisante entre les colonnes de la matrice \mathbf{A} . Par exemple, si \mathbf{A} contient les vecteurs directionnels \mathbf{a}_r , alors les sources ne se trouvent pas dans la même direction physique dans l'espace ; si elle contient des signaux temporels, alors les sources ne sont pas complètement corrélées.

Exemple 1 : si $\mu_A = \mu_B = \mu_C = 0.6$, et $R = 3$, alors $\mu_A \mu_B \mu_C = 0.216$ est plus petit que $1/2$. La condition (8) est donc satisfaite pour $\nu = 1$. C'est le cas de la simulation 1, où des matrices aléatoires sont générées avec des cohérences dans l'intervalle $[0.2, 0.6]$.

Exemple 2 : si $\mu_A = 0.997$, $\mu_B = 0.999$, $\mu_C = 0.99999$ et $R = 3$, alors $\mu_A \mu_B \mu_C = 0.9960$, qui est plus grand que $1/2$. C'est le cas de la simulation 2.

Remarque 1 *La condition (8) garantit l'existence de la meilleure approximation de rang R de n'importe quel tenseur. Elle est suffisante dans le sens où il pourrait exister un tenseur qui ne satisfait pas (8) mais qui admettrait quand même une meilleure approximation de rang R .*

La contrainte (8) mérite attention parce qu'elle comporte des opérateurs max qui ne sont pas différentiables. Pour cette raison, nous proposons d'utiliser le fait que la norme L^∞ de tout vecteur \mathbf{v} peut être majorée par des normes $L^{2\rho}$, et approchée pour des grandes valeurs de ρ :

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_k \{v_k\} \leq \|\mathbf{v}\|_{2\rho} = \left(\sum_k v_k^{2\rho} \right)^{1/2\rho}, \quad \forall \rho \geq 1$$

pour $v_k \in \mathbb{R}^+$. L'application de cette inégalité à $v_k \equiv |\mathbf{a}_p^H \mathbf{a}_q|$ permet de majorer les cohérences par une quantité différentiable, de telle sorte qu'une autre condition

suffisante (un peu plus restreinte) peut être obtenue. Plus précisément :

$$\mu_A \leq \mu(\mathbf{A}, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{p < q} |\mathbf{a}_p^H \mathbf{a}_q|^{2\rho} \right)^{1/2\rho}$$

Notons par souci de concision $\mathbf{x} = \text{vec}\{[\mathbf{A}^\top, \mathbf{B}^\top, \mathbf{S}^\top]\}$. On appelle par la suite $\mathcal{C}_\rho(\mathbf{x})$ la contrainte obtenue en remplaçant les opérateurs max par les normes $L^{2\rho}$ dans la condition (8) :

$$\mathcal{C}_\rho(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - R)/\nu + \mu(\mathbf{A}, \rho)^{-1} \mu(\mathbf{B}, \rho)^{-1} \mu(\mathbf{S}, \rho)^{-1} \geq 0 \quad (9)$$

Il est clair que si (9) est satisfaite, alors (8) l'est aussi. Il s'agit donc d'une condition suffisante.

3.4 Unicité

Il existe des conditions suffisantes garantissant que la solution de (4) est unique, qui font intervenir les cohérences [15]. Toutefois, la condition ci-dessous est beaucoup moins contraignante [9, p.13] :

$$R \leq M \text{ et } R(R - 1) \leq \frac{K(K - 1)L(L - 1)}{2} \quad (10)$$

et garantit qu'il existe presque sûrement une solution unique. D'autres conditions suffisantes d'unicité générique existent [3, 1], mais peuvent être moins intéressantes lorsqu'une dimension, *i.e.* M , est grande.

4 Estimation conjointe des DoA et des signaux sources

4.1 Optimisation

L'optimisation avec contrainte est effectuée à l'aide d'algorithmes de type descente de gradient. Définissons la fonction objectif :

$$\mathcal{F}_\rho(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = \Upsilon(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) + \eta \exp(-\gamma \mathcal{C}_\rho(\mathbf{x})) \quad (11)$$

où η est le poids de la pénalité, γ est introduit pour contrôler la raideur de la pénalité $\mathcal{C}_\rho(\mathbf{x})$, et $\boldsymbol{\lambda}$ est défini dans (7) et dépend de \mathbf{x} et \mathbf{z} . Cela conduit à l'algorithme ci-dessous

ALGORITHME

1. Choisir R satisfaisant (10).
2. Initialiser $(\mathbf{A}(0), \mathbf{B}(0), \mathbf{S}(0))$ par des matrices de colonnes normées satisfaisant $\mathcal{C}_\rho(\mathbf{x}) > 0$.
3. Calculer $\mathbf{G}(0)$ et $\mathbf{f}(0)$, et résoudre $\mathbf{G}(0) \boldsymbol{\lambda}(0) = \mathbf{f}(0)$ en $\boldsymbol{\lambda}$ en utilisant (7)
4. Pour $k = 1; k := k + 1$ jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint, faire :

- (a) Calculer la direction de descente définie par le gradient selon \mathbf{x} :

$$\mathbf{d}(k) = -\nabla \mathcal{F}_\rho(\mathbf{x}(k-1); \boldsymbol{\lambda}(k-1))$$
 - (b) Calculer un pas $\ell(k)$
 - (c) Mettre à jour $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) + \ell(k) \mathbf{d}(k)$
 - (d) Extraire les 3 blocs à partir de $\mathbf{x}(k)$: $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$ and $\mathbf{S}(k)$
 - (e) Normaliser les colonnes de $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$ and $\mathbf{S}(k)$
 - (f) Calculer $\mathbf{G}(k)$ et $\mathbf{f}(k)$, et résoudre $\mathbf{G}(k) \boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{f}(k)$ en $\boldsymbol{\lambda}$, en utilisant (7).
5. Sortir $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}; \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k), \mathbf{S}(k); \boldsymbol{\lambda}(k))$
 6. Calculer les DoAs à partir de \mathbf{A} comme détaillé dans la section 4.2

Dans l'algorithme, η est diminué lorsque l'erreur $\Upsilon(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})$ diminue, alors que γ est maintenu fixe. La taille du pas est déterminée de façon standard, en suivant les conditions de Wolf ; voir *e.g.* [18] pour plus de détails.

On donne maintenant quelques expressions de gradients⁴ nécessaires pour déterminer la direction de descente $\mathbf{d}(k)$ lorsque \mathcal{F}_ρ est utilisée :

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{A}} = 2 \mathbf{A} \mathbf{M}^A - 2 \mathbf{N}^A$$

avec

$$M_{pq}^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{jk} \lambda_p B_{jp} S_{kp}^* S_{kq}^* B_{jq}^* \lambda_q^*$$

$$N_{ip}^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{jk} Z_{ijk} B_{jp}^* S_{kp}^* \lambda_p^*$$

et

$$\frac{\partial \exp(-\gamma \mathcal{C}_\rho)}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\gamma}{\exp(\gamma \mathcal{C}_\rho)} \mathcal{L}_\rho^A \mathbf{A} [(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \boxtimes \boldsymbol{\Omega}^A - \mathbf{I}]$$

où \boxtimes désigne le produit d'Hadamard,

$$\mathcal{L}_\rho^A \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{q < p} |\mathbf{a}_p^H \mathbf{a}_q|^{2\rho} \right)^{\frac{-1}{2\rho} - 1} \mu(\mathbf{B}, \rho)^{-1} \mu(\mathbf{S}, \rho)^{-1},$$

et $\Omega_{pq}^A \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{a}_q^H \mathbf{a}_p|^{2\rho-2}$. Il faut garder à l'esprit que les expressions ci-dessus sont vraies parce que les colonnes de \mathbf{A} sont normalisées. Les expressions sont semblables pour les matrices \mathbf{B} et \mathbf{S} , qui possèdent aussi des colonnes normées.

4.2 Localisation des sources

Puisque dans notre algorithme, la matrice \mathbf{A} a été calculée sans forcer aucune structure, il est nécessaire d'extraire les DoAs à partir des éléments de \mathbf{A} . Cette approche est sous-optimale, mais permet de réduire considérablement la complexité de calcul.

Dans le cadre de ce travail, on considère des sous-antennes identiques avec des formes géométriques arbitraires. Chaque sous-antenne est conçue de façon à ce que la

4. Les dérivées matricielles sont calculées suivant les conventions décrites dans [4, 12].

distance entre deux capteurs successifs (k et $k + 1$) soit inférieure ou égale à la demie longueur d'onde. Les éléments de \mathbf{A} sont donnés par :

$$A_{kr} = \frac{1}{\sqrt{K}} \exp \left\{ j \frac{\omega}{c} (p_{k,2} \sin \psi_r + p_{k,3} \cos \psi_r) \right\} \quad (12)$$

où ψ_r est la DoA de la r ème source comme illustré sur la Figure 1. Pour exploiter cette propriété et éviter l'implantation du déroulement de phase, on forme le quotient entre deux éléments successifs dans la r ème colonne de \mathbf{A} :

$$\frac{A_{k+1,r}}{A_{k,r}} = \exp \left\{ j \frac{\omega}{c} ((p_{k+1,2} - p_{k,2}) \sin \psi_r + (p_{k+1,3} - p_{k,3}) \cos \psi_r) \right\} \quad (13)$$

Ensuite, l'équation ci-dessous

$$(p_{k+1,2} - p_{k,2}) \sin \psi_r + (p_{k+1,3} - p_{k,3}) \cos \psi_r = -j \frac{c}{\omega} \ln \left(\frac{A_{k+1,r}}{A_{k,r}} \right)$$

donne le système linéaire suivant pour chaque r , $1 \leq r \leq R$:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \sin \psi_r \\ \cos \psi_r \end{bmatrix} = \mathbf{v}_r \quad (14)$$

où $\mathbf{M} = [\bar{\mathbf{p}}_{2:K}^2 - \bar{\mathbf{p}}_{1:K-1}^2, \bar{\mathbf{p}}_{2:K}^3 - \bar{\mathbf{p}}_{1:K-1}^3]$, $\mathbf{v}_r = -j \frac{c}{\omega} \ln (\mathbf{A}_{2:K,r} \oslash \mathbf{A}_{1:K-1,r})$, le symbole \oslash représente la division élément par élément, et $\bar{\mathbf{p}}^i$ désigne les colonnes de la matrice de dimension $K \times 3$ contenant les coordonnées des capteurs :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_K]^T = [\bar{\mathbf{p}}^1, \bar{\mathbf{p}}^2, \bar{\mathbf{p}}^3].$$

Si la solution aux moindres carrés de (14) admet une solution dont la norme est raisonnablement proche de 1 (nous avons fixé l'intervalle à $[0.8, 1.2]$ dans la suite), alors l'estimation de la DoA de la source correspondante est donnée par

$$\begin{bmatrix} \sin \hat{\psi}_r \\ \cos \hat{\psi}_r \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{w}_r}{\|\mathbf{w}_r\|}, \quad \mathbf{w}_r = \mathbf{M}^\dagger \mathbf{v}_r \quad (15)$$

où † représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose. Une valeur unique de ψ_r est alors donnée dans l'intervalle $[0, 360^\circ]$. En revanche, si la norme de \mathbf{w} n'appartient pas à l'intervalle $[0.8, 1.2]$, on procède par approximation directe de (12) en utilisant une recherche exhaustive sur ψ_r . En effet, il s'est avéré que dans ce dernier cas la procédure rapide (15) n'est pas assez précise.

4.3 Estimation des sources

La localisation des sources nécessitait un traitement supplémentaire pour obtenir les DoAs. En revanche, les colonnes de la matrice \mathbf{S} fournissent directement les signaux sources estimés. Les indéterminations sur les facteurs d'échelle complexes dans les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont fixées grâce au fait que leur première ligne ne contient que des uns. Plus précisément, la transformation suivante

$$(\hat{\mathbf{a}}_r, \hat{\mathbf{b}}_r, \hat{\mathbf{s}}_r; \hat{\lambda}_r) \leftarrow \left(\frac{1}{A_{1r}} \mathbf{a}_r, \frac{1}{B_{1r}} \mathbf{b}_r, \lambda_r A_{1r} B_{1r} \mathbf{s}_r; 1 \right) \quad (16)$$

fixe toutes les indéterminations d'échelle. Par conséquent, les estimés des signaux sources sont donnés par $\hat{\mathbf{s}}_r$, $1 \leq r \leq R$.

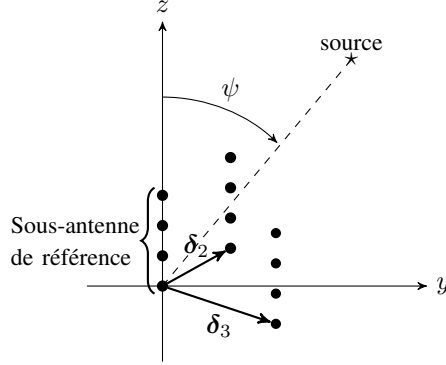


FIGURE 1 – Une source ($R = 1$) éclairant une antenne comportant $L = 3$ sous-antennes.

5 Bornes de Cramér-Rao complexes

Lorsque les paramètres sont complexes, les expressions des bornes de CR dépendent de la définition de la dérivation complexe. Comme une fonction réelle de la variable complexe n'est jamais holomorphe sauf si elle est constante [4], cette définition est nécessaire. Ceci a été négligé dans [31] mais pas dans [16] par exemple.

A l'origine, la dérivée d'une fonction réelle $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^p$ par rapport à la variable complexe $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha} + j\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$, a été définie comme la matrice $p \times n$ matrix [4] :

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + j \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

Même si les résultats finaux (notamment l'efficacité des estimateurs) ne dépend évidemment pas de la définition adoptée pourvu qu'elle soit cohérente, nous allons adopter celle introduite plus tard indépendamment dans [12], pour des raisons de compatibilité avec [16] :

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \frac{j}{2} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad (17)$$

Dans cette définition, on a par exemple $\partial \boldsymbol{\alpha} / \partial \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \mathbf{I}$, et $\partial \boldsymbol{\beta} / \partial \boldsymbol{\theta} = -\frac{j}{2} \mathbf{I}$, alors qu'avec les conventions de [4] on aurait $\partial \boldsymbol{\alpha} / \partial \boldsymbol{\theta} = \mathbf{I}$, et $\partial \boldsymbol{\beta} / \partial \boldsymbol{\theta} = j \mathbf{I}$. Supposons qu'on veuille estimer le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ à partir d'une observation \mathbf{z} , de distribution de probabilité $\mathcal{L}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})$, et notons $\mathbf{u}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})$ la fonction score :

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})^\top \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \log \mathcal{L}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) \quad (18)$$

Alors pour toute fonction différentiable $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^p$ nous avons :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})^\top\} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})\}. \quad (19)$$

Ceci est une conséquence directe du fait que $\mathbb{E}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{0}$. Soit maintenant $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z})$ un estimateur non biaisé de $\boldsymbol{\theta}$. Alors, en suivant le même raisonnement que dans [4], on

peut montrer que $E\{\hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{u}^T\} = E\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}^T\} = \mathbf{I}$ et que $E\{\hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{u}^H\} = \mathbf{0}$. Puis en développant l'expression de la matrice de covariance de $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}^*$, on obtient finalement :

$$\mathbf{V} \geq \mathbf{F}^{-1} \quad (20)$$

avec

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} E\{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^H\} \text{ and } \mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} E\{\mathbf{u}^* \mathbf{u}^T\} \quad (21)$$

On remarquera que cette définition de la matrice d'information de Fisher est la conjuguée complexe de [4], à cause d'une définition différente de la dérivée complexe (et donc de la fonction score). Evidemment, ce n'est qu'une question de convention, et les résultats qualitatifs restent les mêmes. Les expressions (21) sont celles qu'on trouve dans [12] et qui sont maintenant largement utilisées en traitement du signal.

6 Calcul des bornes de Cramér-Rao en présence de bruit non circulaire

Le facteur d'échelle λ avait été introduit en (7) pour des raisons numériques. Dans cette section, nous allons utiliser le modèle tensoriel avec les facteurs matriciels sans normalisation pour faciliter les calculs. On adopte donc le modèle :

$$\mathbf{z} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \boxtimes \mathbf{b}_r \boxtimes \mathbf{s}_r, \quad (22)$$

Cependant, il y a toujours $(K + L + M - 2)R$ paramètres libres à estimer, la première ligne des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} étant composée de 1. Autrement dit, le modèle (22) peut être obtenu à partir de (4) par la transformation (16).

6.1 Vraisemblance

On suppose que le bruit $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x + j \mathbf{n}_y$ suit une loi normale complexe de moyenne nulle. La vraisemblance de \mathbf{z} , définie en (4), vaut :

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-KLM} (\det(\boldsymbol{\Sigma}) \det(\mathbf{Q}))^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^H (\mathbf{Q}^{-1})^* (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ \left. \text{Re} \left((\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{R}^T (\mathbf{Q}^{-1})^* (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \right) \right\} \quad (23)$$

où $\boldsymbol{\mu}$ désigne la partie non bruitée de \mathbf{z} , $\boldsymbol{\Sigma}$ est la covariance de \mathbf{z} , $\mathbf{C} = E\{(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T\}$ est la covariance non circulaire (quelquefois appelée matrice de *relation*), et

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}^* - \mathbf{C}^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{C}^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \quad (24)$$

Dans les simulations qui vont suivre, on considèrera un bruit de forme générale, dans lequel la non-circularité est contrôlée par un paramètre ε :

$$\text{cov} \{[\mathbf{n}_x^T, \mathbf{n}_y^T]^T\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} (1 + \varepsilon) \mathbf{I} & \varepsilon \mathbf{I} \\ \varepsilon \mathbf{I} & (1 - \varepsilon) \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Dans ce cas $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ et $\mathbf{C} = \sigma^2 \varepsilon (1 + j) \mathbf{I}$. La vraisemblance prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) = \left(\sigma^2 \pi (1 - 2\varepsilon^2)^{1/2} \right)^{-KLM} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma^2 (1 - 2\varepsilon^2)} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^H (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon(1-j)}{\sigma^2 (1 - 2\varepsilon^2)} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \right) \right\} \quad (26)$$

Notons le vecteur de paramètres recherchés

$$\boldsymbol{\theta} = [\underbrace{\psi_1, \dots, \psi_R}_{\boldsymbol{\psi}}, \underbrace{\bar{\mathbf{b}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{b}}_R^T, \mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_R^T}_{\boldsymbol{\xi}}, \underbrace{\bar{\mathbf{b}}_1^H, \dots, \mathbf{s}_R^H}_{\boldsymbol{\xi}^*}] \quad (27)$$

où $\bar{\mathbf{b}}_r \stackrel{\text{def}}{=} [B_{2,r}, \dots, B_{L,r}]^T$. La vraisemblance \mathcal{L} est par définition fonction de \mathbf{z} et \mathbf{z}^* , et pas de $\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}\|$ seulement, en particulier lorsque le bruit n'est pas circulaire ($\mathbf{C} \neq 0$).

6.2 Information de Fisher

Comme nous l'avons dit plus haut, il n'est pas nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur \mathbf{S} pour calculer les bornes de CR, contrairement à ce qui a été fait dans [16]. Le fait que la première ligne de \mathbf{A} et \mathbf{B} est égale à $[1, \dots, 1]$ suffit à réduire le nombre de paramètres libres à $(K + L + M - 2)R$. Réécrivons la vraisemblance :

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) = -KLM \log \left(\sigma^2 \pi (1 - 2\varepsilon^2)^{1/2} \right) - \frac{1}{\sigma^2 (1 - 2\varepsilon^2)} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^H (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \\ + \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon(1-j)}{\sigma^2 (1 - 2\varepsilon^2)} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \right) \quad (28)$$

On obtient immédiatement la fonction score :

$$\mathbf{u}^T = \frac{1}{\sigma^2 (1 - 2\varepsilon^2)} \cdot \left[\mathbf{n}^T \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{n}^H \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \varepsilon \left((1+j) \mathbf{n}^H \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} + (1-j) \mathbf{n}^T \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right] \quad (29)$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}$. Puis en substituant \mathbf{u} par son expression, on obtient la matrice de Fisher :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma^2 (1 - 2\varepsilon^2)} \cdot \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^H \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \varepsilon(1-j) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^H \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \varepsilon(1+j) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right] \quad (30)$$

Comme les paramètres angulaires $\boldsymbol{\psi}$ sont réels et ceux de $\boldsymbol{\xi}$ sont complexes, on peut écrire les dérivées apparaissant dans (30) comme suit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\psi}}, & \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^*}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right)^*, & \mathbf{0}, & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^* \end{bmatrix} \quad (31)$$

et la matrice de Fisher devient :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma^2(1-2\varepsilon^2)} \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{K}_{11}\} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{12}^* \\ \mathbf{K}_{12}^H & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{H}_{22}^* \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{G}_{22}^* \end{bmatrix} \quad (32)$$

où :

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{G}_{ij} + \mathbf{H}_{ij}, \quad \mathbf{G}_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \right)^H \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \right), \quad \mathbf{H}_{ij} = \varepsilon(j-1) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \right)^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \right) \quad (33)$$

avec $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$, $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\xi}$.

Dans le cas d'un bruit circulaire (CCG), on remarquera que la matrice de Fisher s'obtient en prenant $\varepsilon = 0$ dans (32) :

$$\mathbf{F}_c = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{G}_{11}\} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{12}^* \\ \mathbf{G}_{12}^H & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{12}^T & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22}^* \end{bmatrix} \quad (34)$$

L'introduction de la variable $\boldsymbol{\xi}^*$ dans le vecteur de paramètres est alors inutile.

6.3 Dérivées de $\boldsymbol{\mu}$ par rapport à $\boldsymbol{\psi}$ et $\boldsymbol{\xi}$

Il nous reste maintenant à donner l'expression des dérivées apparaissant dans (31). On applique la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \psi_f} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{a}_f^T} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{a}_f^T}{\partial \psi_f} \right) \quad (35)$$

et la règle de dérivation par rapport à la variable complexe, et on obtient facilement :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{a}_f^T} = \mathbf{I}_K \boxtimes \mathbf{b}_f \boxtimes \mathbf{s}_f \in \mathbb{C}^{KLM \times K}, \quad 1 \leq f \leq R. \quad (36)$$

Quant à la dérivée $[\partial \mathbf{a}_f^T / \partial \psi_f]$, on utilise l'équation (12) sans le facteur d'échelle $\frac{1}{\sqrt{K}}$:

$$\frac{\partial \mathbf{a}_f^T}{\partial \psi_f} = -j \frac{\omega}{c} (\cos \psi_f \bar{\mathbf{p}}^2 - \sin \psi_f \bar{\mathbf{p}}^3) \boxtimes \mathbf{a}_f \quad (37)$$

où $\bar{\mathbf{p}}^2$ et $\bar{\mathbf{p}}^3$ désignent respectivement la deuxième et troisième colonne de la matrice \mathbf{P} de positions des capteurs. En substituant (36) et (37) dans (35), il vient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \psi_f} = -j \frac{\omega}{c} (\mathbf{I}_K \boxtimes \mathbf{b}_f \boxtimes \mathbf{s}_f) (\cos \psi_f \bar{\mathbf{p}}^2 - \sin \psi_f \bar{\mathbf{p}}^3) \boxtimes \mathbf{a}_f \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\phi}_{\psi_f}$$

et

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\psi}} = [\phi_{\psi_1}, \dots, \phi_{\psi_R}] \in \mathbb{C}^{KLM \times R} \quad (38)$$

Voyons maintenant la dérivée par rapport à $\boldsymbol{\xi}$. Les dérivées partielles de $\boldsymbol{\mu}$ par rapport à $\bar{\mathbf{b}}_f^\top$ et \mathbf{s}_f^\top sont :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \bar{\mathbf{b}}_f^\top} = (\mathbf{a}_f \boxtimes \mathbf{I}_{LM})(\mathbf{I}_L \boxtimes \mathbf{s}_f) \mathbf{J}_L \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\phi}_{\bar{\mathbf{b}}_f} \in \mathbb{C}^{KLM \times (L-1)} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{s}_f^\top} = \mathbf{a}_f \boxtimes \mathbf{b}_f \boxtimes \mathbf{I}_M \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{s}_f} \in \mathbb{C}^{KLM \times M} \quad (40)$$

où $\mathbf{J}_L = [\mathbf{0}_{(L-1),1} \ \mathbf{I}_{L-1}]^\top \in \mathbb{C}^{L \times (L-1)}$ est une matrice de sélection. Pour résumer :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = [\phi_{\bar{\mathbf{b}}_1}, \dots, \phi_{\bar{\mathbf{b}}_R}, \phi_{\mathbf{s}_1}, \dots, \phi_{\mathbf{s}_R}] \in \mathbb{C}^{KLM \times R(L+M-1)} \quad (41)$$

La borne de CR relative aux DoA seules est obtenue en prenant le premier bloc diagonal $R \times R$ de la matrice \mathbf{F}^{-1} , dont l'inverse est définie en (32). Cette procédure traite les translations comme paramètres de nuisance, ce qui est intéressant dans un certain nombre d'applications comme nous l'avons précisé dans la section 2.1.

7 Simulations numériques

Cette section a deux objectifs. Premièrement, nous montrons le rôle de la pénalité $\mathcal{C}_\rho(\mathbf{x})$, soit le long de la trajectoire lorsque le point limite recherché (la vraie solution) réside dans la région admissible, ou lorsque la contrainte est active au point limite recherché. Ce rôle est montré par des comparaisons avec un algorithme de même nature, mais sans pénalité. Deuxièmement, on compare la RMSE (*Root Mean Square Error*) totale aux bornes inférieures de CR. On évalue également l'amélioration apportée par une troisième sous-antenne, lorsque l'on compare notre algorithme avec ESPRIT (évidemment, les résultats coïncident avec ESPRIT quand deux sous-antennes seulement sont utilisées).

Dans toutes les simulations, l'antenne est formée de trois sous-antennes identiques décalées, de quatre capteurs chacune, comme représenté sur la Figure 1. La matrice de taille $3 \times R$ définissant les positions des capteurs de l'antenne référence est :

$$\mathbf{P}^\top = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9428 & 0.2814 \\ 0 & 1 & 1.3333 & 2.0833 \end{bmatrix}$$

Par la suite, on prend $\rho = 10$, $\gamma = 5$ et $\nu = 1$; ces choix heuristiques ont été satisfaisants dans toutes nos simulations.

7.1 Comparaison avec d'autres algorithmes d'optimisation

Pour montrer l'intérêt de l'algorithme proposé, on le compare à deux autres algorithmes de CPD : i) son homologue sans contrainte et sans calcul de la valeur optimale

de λ définie dans (7), ii) l'algorithme de descente de gradient de Levenberg-Marquardt (NLS-LM) [17, 8]. Les performances sont évaluées selon deux critères, l'erreur sur les facteurs matriciels estimés et la *meilleure somme des "congruences"* [30]; ce dernier critère n'est rien d'autre que le cosinus du premier angle principal [7]. Il est défini entre deux tenseurs de rang un, $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{s}$ et $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{b}} \otimes \hat{\mathbf{s}}$, par :

$$\frac{|\langle \mathbf{T}, \hat{\mathbf{T}} \rangle|}{\|\mathbf{T}\| \|\hat{\mathbf{T}}\|} = \frac{|\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{a}}|}{\|\mathbf{a}\| \|\hat{\mathbf{a}}\|} \frac{|\mathbf{b}^H \hat{\mathbf{b}}|}{\|\mathbf{b}\| \|\hat{\mathbf{b}}\|} \frac{|\mathbf{s}^H \hat{\mathbf{s}}|}{\|\mathbf{s}\| \|\hat{\mathbf{s}}\|} \quad (42)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire associé à la norme de Frobenius.

Pour comparer deux tenseurs de rang $R > 1$, la meilleure somme des congruences nécessite de trouver la meilleure permutation σ entre les colonnes des facteurs matriciels :

$$\max_{\sigma} \sum_{r=1}^R \frac{|\mathbf{a}_r^H \hat{\mathbf{a}}_{\sigma(r)}|}{\|\mathbf{a}_r\| \|\hat{\mathbf{a}}_{\sigma(r)}\|} \frac{|\mathbf{b}_r^H \hat{\mathbf{b}}_{\sigma(r)}|}{\|\mathbf{b}_r\| \|\hat{\mathbf{b}}_{\sigma(r)}\|} \frac{|\mathbf{s}_r^H \hat{\mathbf{s}}_{\sigma(r)}|}{\|\mathbf{s}_r\| \|\hat{\mathbf{s}}_{\sigma(r)}\|} \quad (43)$$

Il sont comparés dans deux cas différents : 1) des sources gaussiennes non corrélées avec des DoAs bien séparées, *i.e.* la contrainte n'est pas active ($\mathcal{C}_\rho \geq 0$) à la convergence, et 2) des sources corrélées avec des DoAs proches, *i.e.* la contrainte est active ($\mathcal{C}_\rho < 0$) à la convergence. Afin de produire des résultats comparables, les trois méthodes sont initialisées avec les mêmes points initiaux, et partagent les mêmes critères d'arrêt. Ceux-ci sont :

- la variation relative de la fonction objectif sur deux itérations successives. L'algorithme s'arrête quand

$$\frac{|\mathcal{F}_{\text{current}} - \mathcal{F}_{\text{previous}}|}{\mathcal{F}_{\text{previous}}} \leq 10^{-6}$$

- la tolérance sur la norme de Frobenius du gradient divisée par le nombre d'éléments dans le gradient est fixée à 10^{-8} ,
- le nombre maximal d'itérations est fixé à 10^3 .

• *Simulation 1:* Dans cette expérience, 1000 essais indépendants sont exécutés avec trois DoAs aléatoires bien séparées dans l'intervalle $[0^\circ, 360^\circ]$, et six échantillons générés aléatoirement sont simulés. Les tenseurs sont alors de taille $4 \times 3 \times 6$. Les points initiaux pour les trois méthodes (proposée, sans contrainte et NLS-LM) sont générés en utilisant la HOSVD (*higher-order singular value decomposition*) suivie par cinq itérations de ALS (*alternating least squares*). Comme il a été mentionné dans la Section 4, on fait varier η au cours des itérations. Plus précisément dans cette expérience, η est initialisé à 0.1, et est divisé par 100 quand $\Upsilon(\mathbf{x}; \lambda)$ diminue de moins de 10^{-4} . Si la meilleure somme des congruences (43) est au-dessus d'un seuil de 0.97, alors l'estimation est considérée comme correcte [25].

La Figure 2 présente le nombre d'itérations effectuées dans chaque essai, où les cohérences appartiennent toujours à l'intervalle $[.2, .6]$, *i.e.* $\mathcal{C}_\rho > 0$. On peut donc observer que l'algorithme proposé converge plus rapidement que celui sans contrainte. Une inspection plus approfondie révèle également que la méthode proposée donne 99% d'estimations correctes alors que l'algorithme sans contrainte et NLS-LM donnent 97% et 97.5% respectivement.

La Figure 3 présente une comparaison des trois algorithmes en terme de précision sur l'estimation des DoAs. Elle montre l'histogramme de $\log_{10} \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\psi_i - \hat{\psi}_i)^2}$ pour chaque essai. On peut remarquer que l'algorithme proposé est plus précis que les deux autres algorithmes. •

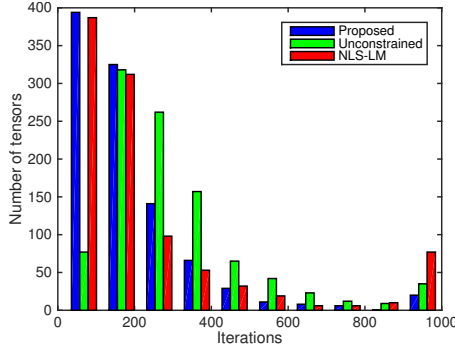


FIGURE 2 – Nombre d'itérations exécutées durant 1000 réalisations indépendantes.

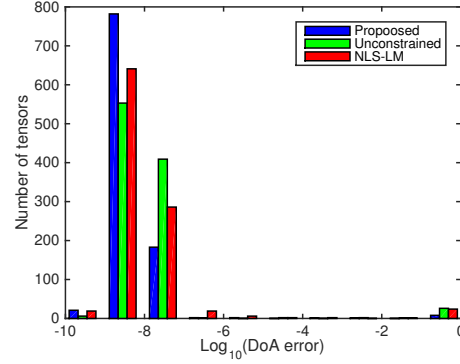


FIGURE 3 – Erreur d'estimation sur les DoAs pour 1000 tenseurs.

• *Simulation 2:* Cette simulation vise à montrer l'efficacité de l'algorithme proposé dans des conditions très difficiles, lorsque la contrainte est active au point limite recherché : les sources s_2 et s_3 sont fortement corrélées et proches angulairement. Plus précisément, nous travaillons toujours avec la même antenne, mais seulement $M = 6$ échantillons de temps sont utilisés. La taille du tenseur est alors $4 \times 3 \times 6$, et $R = 3$ sources incidentes, localisées dans les directions $\psi_1 = 40^\circ$, $\psi_2 = 83^\circ$ et $\psi_3 = 85^\circ$ respectivement. Les sources sont générées comme suit. Une réalisation de trois vecteurs aléatoires indépendants de dimension 6 avec des éléments i.i.d. a été effectuée, donnant les vecteurs \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 and \mathbf{c}_3 . Les sources sont ensuite construites comme suit : $\mathbf{s}_1 = \mathbf{c}_1$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{c}_2/\epsilon$, et $\mathbf{s}_3 = \mathbf{c}_2/\epsilon + \mathbf{c}_3$, avec $\epsilon = 0.005$. En utilisant ces réglages, les cohérences sont alors égales à $\mu_A = 0.99$, $\mu_B = 0.99$, $\mu_S \approx 1$ à une précision de 10^{-5} près, et $\mathcal{C}_\rho = -0.99$. Dans cette expérience, η est initialisé à 0.1, et est divisé par 10 quand la fonction objectif diminue de moins de 10^{-4} entre deux itérations consécutives, avec cependant une valeur minimale de $\eta_{\min} = 10^{-5}$.

La Figure 4 présente les résultats obtenus dans le cas sans bruit, avec 100 différents points initiaux. On peut remarquer qu'avec les mêmes initialisations, l'algorithme proposé est capable de localiser approximativement les trois sources, alors que les deux autres algorithmes ne détectent même pas la source à 40° . Le meilleure somme des congruences, moyennée sur le nombre de sources, est tracée sur la figure 4(b) ; cet indice montre, dans ce cas, les mauvaises performances des algorithmes NLS-LM et sans contrainte.

La Figure 5 montre la robustesse de l'algorithme proposé en présence de faible bruit. On peut observer que les sources à $\psi_2 = 83^\circ$ et $\psi_3 = 85^\circ$ sont bien détectées, mais avec un biais directionnel similaire. Toutefois, l'activation de la contrainte en-

traîne généralement une augmentation du biais.

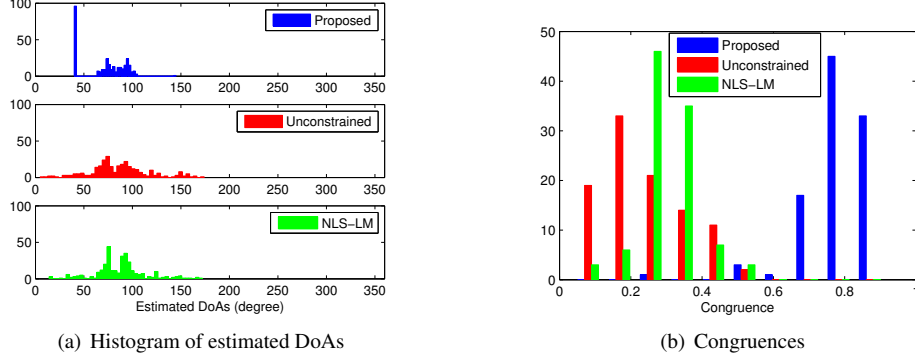


FIGURE 4 – Scenario sans bruit avec sources proches et corrélées, $\psi = [40, 83, 85]$. $\mu_A = 0.99, \mu_B = 0.99, \mu_S \approx 1$ à 10^{-5} près, et $\mathcal{C}_\rho = -0.99$; résultats obtenus avec 100 initialisations aléatoires.

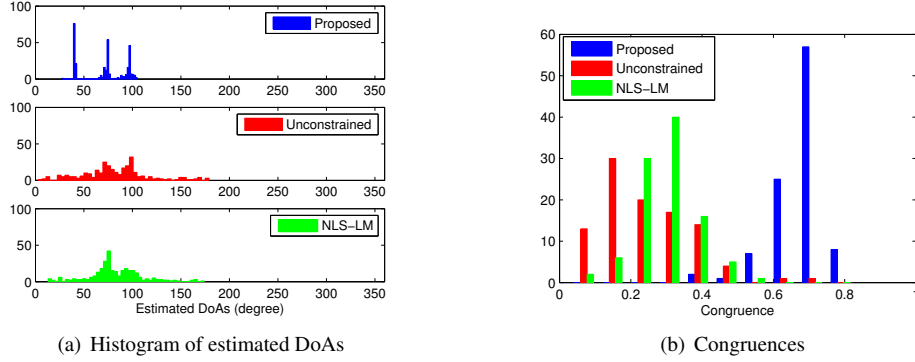


FIGURE 5 – Scenario bruité avec sources proches et corrélées, $\psi = [40, 83, 85]$. $\mu_A = 0.99, \mu_B = 0.99, \mu_S \approx 1$ à 10^{-5} près, $\mathcal{C}_\rho = -0.99$ and SNR= 20 dB; résultats obtenus avec 100 initialisations aléatoires.

7.2 Simulations de Monte Carlo

Pour évaluer l'efficacité de la méthode proposée, nous comparons ses performances à deux autres algorithmes, ESPRIT et MUSIC [27, 19]. Le critère utilisé est l'erreur-type (Total RMSE : *total root mean square error*) sur les DoAs définie par : $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{RN} \sum_{r=1}^R \sum_{n=1}^N (\hat{\psi}_{r,n} - \psi_r)^2}$ où $\hat{\psi}_{r,n}$ est la DoA estimée dans le n ème essai de Monte-Carlo et N est le nombre total d'essais. Les bornes inférieures déterministes de CR donnent la référence d'efficacité. Le scénario sur lequel l'algorithme proposé est testé peut être intéressant dans nombre d'applications, où les translations δ_ℓ sont

inconnues, comme cela a été signalé dans la Section 2.1. Pour montrer l'influence des différents paramètres du problème sur les résultats d'estimation, nous avons choisi trois exemples à étudier, dont les paramètres sont présentés dans le tableau ci-dessous, où $\delta_2 = [0, 25\lambda, 0]^T$, $\delta_3 = [0, 37.5\lambda, 5\lambda]^T$.

	Sous-antennes	Bruit	DoA
Simul. 3	$L = 2, (\delta_2)$	CCG	$40^\circ, 65^\circ, 83^\circ$
Simul. 4	$L = 3, (\delta_2, \delta_3)$	CCG	$40^\circ, 65^\circ, 83^\circ$
Simul. 5	$L = 3, (\delta_2, \delta_3)$	NCCG	$40^\circ, 65^\circ, 83^\circ$

Dans ces simulations, l'antenne est toujours celle représentée sur la Figure 1, les signaux sources ont la même puissance, $M = 200$ échantillons de temps sont utilisés, et 200 essais de Monte-Carlo sont exécutés pour chaque niveau de SNR (*signal to noise ratio*). La valeur de η est la même que dans la simulation 1. Les Figures 6(a), 6(b) et 7(a)-(b) présentent les RMSE totales des DoAs obtenues dans les simulations 3, 4 et 5, respectivement.

- *Simulation 3*: Les résultats rapportés sur la Figure 6(a) montrent que : (i) l'algorithme de décomposition CP proposé présente les mêmes performances que ESPRIT, ce qui est logique, (ii) MUSIC fournit de meilleures estimations, mais exploite plus d'information, à savoir la connaissance exacte des positions des capteurs, alors que réellement cette information n'est pas disponible dans le scénario actuel. MUSIC sert simplement de référence.

- *Simulation 4*: La Figure 6(b) montre que l'algorithme proposé donne de meilleurs résultats par rapport à ESPRIT. La raison est que ESPRIT utilise au plus deux sous-antennes, alors que l'algorithme proposé les utilise toutes. Encore une fois, MUSIC est présenté à titre de référence.

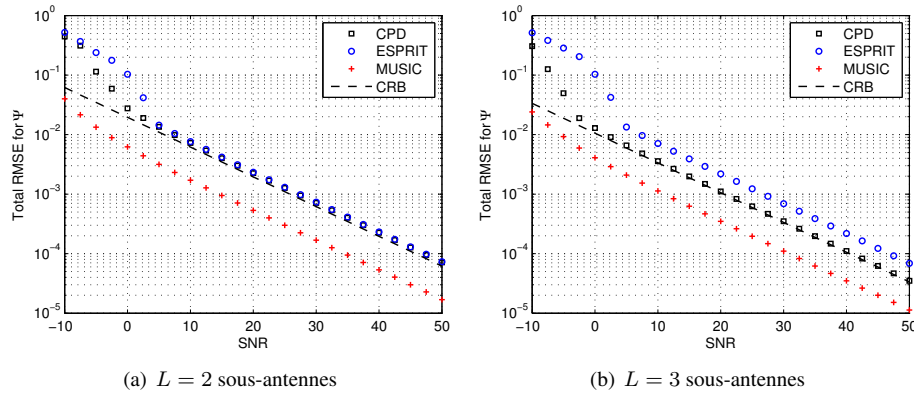


FIGURE 6 – Erreur totale sur les DoA en fonction du niveau de bruit, $\psi = [40^\circ, 65^\circ, 83^\circ]$. (a) $L = 2$, (b) $L = 3$ sous-antennes

- *Simulation 5*: Cette simulation montre que l'influence de la non circularité du bruit sur les performances est relativement faible, du moins dans l'intervalle $\varepsilon \in [0, 0.5]$, comme en témoigne la figure 7. Les paramètres de simulation sont les mêmes

que dans la simulation 4, mis à part ε . L'algorithme proposé fonctionne donc aussi bien lorsque le bruit gaussien devient non circulaire. •

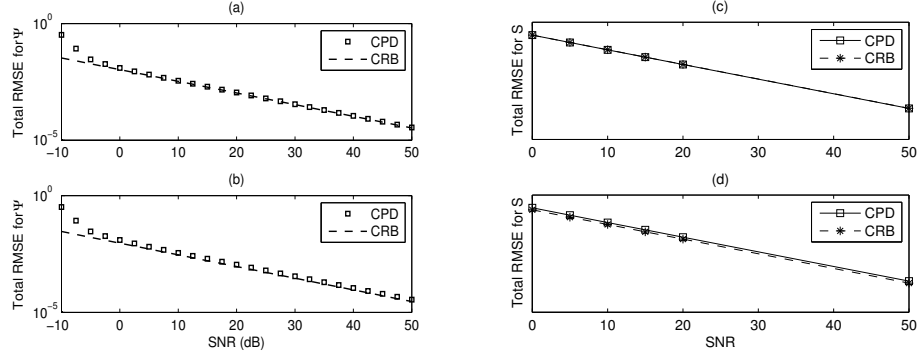


FIGURE 7 – Erreur totale sur les DoA (a, b) et les sources (c, d) en fonction du niveau de bruit, avec $L = 3$ sous-antennes, $\psi = [40^\circ, 65^\circ, 83^\circ]$. (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0.5$, (c) $\varepsilon = 0$, (d) $\varepsilon = 0.5$.

8 Conclusion

L'algorithme proposé est adapté au problème de localisation de sources en champ lointain. Il permet en outre d'estimer les signaux émis par les sources. Pour fonctionner, il nécessite une "diversité" supplémentaire, en plus du temps et de l'espace. Dans cet article, cette diversité est obtenue grâce à la propriété d'invariance par translation dans l'espace, dont jouissent certaines antennes formées de sous-antennes identiques. Nous avons montré qu'il est possible de localiser et d'estimer des sources dont le coefficient de corrélation peut atteindre 0.99999 et séparées angulairement de 2 degrés, et ce, avec très peu d'échantillons temporels. Toutefois, un biais apparaît lorsque les sources se rapprochent, mais ceci ne compromet pas la détection d'après les simulations effectuées.

Références

- [1] H. Abo, G. Ottaviani, and C. Peterson. Induction for secant varieties of Segre varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, pages 767–792, 2009. arXiv :math/0607191.
- [2] G. Bienvenu and L. Kopp. Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem approach. *IEEE Trans. ASSP*, 31(5) :1235–1248, October 1983.
- [3] M. V. Catalisano, A. V. Geramita, and A. Gimigliano. Higher secant varieties of the Segre varieties. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 201(1-3) :367–380, 2005.

- [4] P. Comon. Estimation multivariable complexe. *Traitement du Signal*, 3(2) :97–101, April 1986. hal-00979476.
- [5] P. Comon. Tensors, usefulness and unexpected properties. In *15th IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP'09)*, pages 781–788, Cardiff, UK, Aug. 31 - Sep. 3 2009. keynote. hal-00417258.
- [6] P. Comon. Tensors a brief introduction. *IEEE Sig. Proc. Magazine*, 31(3), May 2014. special issue on BSS. hal-00923279.
- [7] P. Comon and G. H. Golub. Tracking of a few extreme singular values and vectors in signal processing. *Proceedings of the IEEE*, 78(8) :1327–1343, August 1990. (published from Stanford report 78NA-89-01, feb 1989).
- [8] Pierre Comon, Xavier Luciani, and André LF De Almeida. Tensor decompositions, alternating least squares and other tales. *Journal of Chemometrics*, 23(7-8) :393–405, 2009.
- [9] L. De Lathauwer. A link between canonical decomposition in multilinear algebra and simultaneous matrix diagonalization. *SIAM Journal on Matrix Analysis*, 28(3) :642–666, 2006.
- [10] D. L. Donoho and M. Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 100(5) :2197–2202, March 2003.
- [11] R. Gribonval and M. Nielsen. Sparse representations in unions of bases. *IEEE Trans. Information Theory*, 49(12) :3320–3325, December 2003.
- [12] A. Hjørungnes and D. Gesbert. Complex-valued matrix differentiation : Techniques and key results. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 55(6) :2740–2746, June 2007.
- [13] H. A. L. Kiers. Towards a standardized notation and terminology in multiway analysis. *J. Chemometrics*, pages 105–122, 2000.
- [14] H. Krim and M. Viberg. Two decades of array signal processing research. *IEEE Sig. Proc. Mag.*, pages 67–95, July 1996.
- [15] L.-H. Lim and P. Comon. Blind multilinear identification. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 60(2) :1260–1280, February 2014. open access.
- [16] X. Liu and N. Sidiropoulos. Cramér-Rao lower bounds for low-rank decomposition of multidimensional arrays. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 49(9) :2074–2086, 2001.
- [17] K. Madsen, H.B. Nielsen, and O. Tingleff. Methods for non-linear least squares problems, 2004.
- [18] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 2006.
- [19] B. Ottersten, M. Viberg, and T. Kailath. Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 39(5) :1122–1135, 1991.
- [20] M. Pesavento, A. B. Gershman, and K. M. Wong. Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 50(9) :2103–2115, September 2002.

- [21] R. Roy and T. Kailath. ESPRIT - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, 37 :984–995, July 1989.
- [22] S. Sahnoun, E.-H. Djermoune, C. Soussen, and D. Brie. Sparse multidimensional modal analysis using a multigrid dictionary refinement. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, March 2012.
- [23] R. O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antenna Propagation*, 34(3) :276–280, March 1986.
- [24] N. D. Sidiropoulos, R. Bro, and G. B. Giannakis. Parallel factor analysis in sensor array processing. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 48(8) :2377–2388, August 2000.
- [25] A. Smilde, R. Bro, and P. Geladi. *Multi-Way Analysis*. Wiley, Chichester UK, 2004.
- [26] P. Stoica, P. Babu, and J. Li. SPICE : A sparse covariance-based estimation method for array processing. *IEEE Trans. Signal Process.*, 59(2) :629–638, 2011.
- [27] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Proc.*, 37(5) :720–741, 1989.
- [28] A. L. Swindlehurst, B. Ottersten, R. Roy, and T. Kailath. Multiple invariance ESPRIT. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 40(4) :867–881, April 1992.
- [29] P. Tichavsky, A. H. Phan, and Z. Koldovsky. Cramér-Rao-induced bounds for Candecomp/Parafac tensor decomposition. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2013.
- [30] G. Tomasi and R. Bro. A comparison of algorithms for fitting the Parafac model. *Comp. Stat. Data Ana.*, 50(7) :1700–1734, 2006.
- [31] A. van den Bos. A Cramér-Rao bound for complex parameters. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 42(10) :2859, October 1994.
- [32] H. L. van Trees. *Optimum Array Processing*, volume IV. Wiley, New York, 2002.